Изначальное уравнение:

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

***Декартова система***

Начнем с декартовой системы, двумерная случай

Распишем члены уравнения с вязкостью.

*х* – компонента:

*y* – компонента:

*х* – компонента уравнения движения имеет вид

*y* – компонента уравнения движения имеет вид

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

***Цилиндрическая система(C осевой симметрией)***

*r* – компонента:

*z* – компонента:

*Уравнение неразрывности:*

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Преобразование радиальной координаты степенной функцией**

Преобразуем – компоненту:

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

После преобразований:

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

*Преобразуем z* – компоненту:

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Итого***:*

*z* – компонента:

– компонента:

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Уравнение несжимаемости:

Умножим на :

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

конвективный член:

*(легко заметить)*

Легко заметить что третье слагаемое равно (1) и равно 0 тогда для -компоненты:

Тогда -компонента представима в форме:

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Для z компоненты конвективный член:**

Из (\*) выразим

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Тогда (3) подставим в (2):

Тогда получается, что:

Тогда итоговое уравнение для z компоненты:

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

***Для \*\*ξ-компоненты\*\*:***

***Для \*\*z-компоненты\*\*:***

***Эти выражения обеспечивают дивергентную форму, подходящую для метода конечных объемов, с учетом метрического множителя в координатах***

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Численное решение уравнений Навье-Стокса методом конечных объемов

# Общие положения

Система уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах с преобразованным радиусом *ξ* = *rm* приведена к дивергентной форме. Численное решение использует метод конечных объемов (FVM) с двухстадийным подходом:

1. Predictor: вычисление промежуточной скорости **u**∗ с учетом конвективных (∇*J*conv), вязких (∇*J*vis) и источниковых (*S*ист) членов.
2. Corrector: решение уравнения Пуассона для давления *pn*+1 и коррекция скорости **u***n*+1.

Сетка структурированная, ортогональная в координатах (*ξ,z*), с шагом ∆*ξ* и ∆*z*. Контрольный объем (КО) имеет центр *P*(*i,j*) с координатами (*ξP ,zP* ) и грани:

* East (*e*): *ξ* = *ξP* +∆*ξ/*2, площадь.
* West (*w*): *ξ* = *ξP* − ∆*ξ/*2, площадь.
* North (*n*): *z* = *zP* +∆*z/*2, площадь .
* South (*s*): *z* = *zP* − ∆*z/*2, площадь .

Физический объем КО, учитывающий аксисимметрию и преобразование *ξ* = *rm*:

Временная дискретизация явная (первого порядка, Euler forward), шаг ∆*t*, текущий слой времени *n*, следующий *n*+1. Конвективные потоки аппроксимируются экспоненциальной схемой, вязкие — центральной разностной, источники — в центре КО.

# Граничные условия

* Горизонтальные границы (*z* = 0, *z* = *z*max):
  + Вертикальная скорость (*uz*):

– Горизонтальная скорость (*ur*) в фиктивных ячейках:

* + Давление:

, т.е.

* Вертикальные границы (= 0, =):
  + Горизонтальная скорость (*ur*):

– Вертикальная скорость (*uz*) в фиктивных ячейках:

* + Давление:

, т.е.

# Уравнение импульса для *ur* (*ξ*-компонента)

Оригинальное уравнение:

Где:

ρ

ρ

**Стадия 1**: Промежуточная скорость

* Конвективные потоки (*J*conv): Экспоненциальная схема.

**– Для грани east (*e*):**

Где — интерполированная скорость для массопереноса (эффективная скорость в *ξ*-направлении: ),

Если *Pee >* 0 (поток из P в E):

Если *Pee <* 0 (поток из E в P):

Эта аппроксимация обеспечивает плавный переход от центральной разности (при малом Pe) к upwind-схеме (при большом Pe), минимизируя осцилляции и сохраняя точность.

* + **Для грани west (*w*):**

Где ,

Если *Pew >* 0 (поток из W в P):

Если *Pew <* 0 (поток из P в W):

Направление Pe инвертируется относительно east, чтобы учитывать поток слева.

* + **Для грани north (*n*):**

Где — интерполированная скорость в z-направлении,

Если *Pen >* 0 (поток из P в N):

Если *Pen <* 0 (поток из N в P):

Здесь конвекция определяется u*z,ur.*

**– Для грани south (*s*):**

Где ,

Если *Pes >* 0 (поток из S в P):

Если *Pes <* 0 (поток из P в S):

Аналогично north, но направление инвертировано.

* Вязкие потоки (Jvis): Центральная разностная аппроксимация.
  + **Для грани east (*e*):**

Здесь — интерполированная вязкость, производная аппроксимирована центрально, коэффициент *.*

**– Для грани west (*w*):**

Здесь — интерполированная вязкость, производная центральная, знак минус в балансе потоков (вход/выход) учитывается в общей формуле.

**– Для грани north (*n*):**

Здесь , смешанный член: — центральная, — центральная по соседям E и W для стабильности.

**– Для грани south (*s*):**

Здесь , аналогично north, но производная с инверсированным знаком для входа/выхода.

* Источник :

Вычисляется в центре КОP: первый член — дополнительный вязкий эффект от цилиндрической геометрии, второй — гравитация в радиальном направлении; умножен на полный физический объем для интеграла.

На границах:

* : ,.
* : , использует
* : , использует
* : , использует

**Стадия 2**: Коррекция с давлением Уравнение Пуассона:

Граничные условия для *p*:

* , т.е. ,
* , т.е., ,

Коррекция:

# Уравнение импульса для (z-компонента)

Оригинальное уравнение:

Где:

**Стадия 1**: Промежуточная скорость

• Конвективные потоки (): Экспоненциальная схема.

* **Для грани east (*e*):**

Где — интерполированная скорость для массопереноса (эффективная скорость в *ξ*-направлении: ),

Если *>* 0 (поток из P в E):

Если *<* 0 (поток из E в P):

Эта аппроксимация обеспечивает плавный переход от центральной разности (при малом Pe) к upwind-схеме (при большом Pe), минимизируя осцилляции и сохраняя точность. Здесь переносимой величиной является *.*

* **Для грани west (*w*):**

Где

Если *>* 0 (поток из W в P):

Если *<* 0 (поток из P в W):

Направление Pe инвертируется относительно east, чтобы учитывать поток слева.

**– Для грани north (*n*):**

где — интерполированная скорость в z-направлении,

Если *>* 0 (поток из P в N):

Если *<* 0 (поток из N в P):

Здесь конвекция определяется *, .*

**– Для грани south (*s*):**

где ,

Если *>* 0 (поток из S в P):

Если *<* 0 (поток из P в S):

Аналогично north, но направление инвертировано.

* Вязкие потоки (): Центральная разностная аппроксимация.
  + **Для грани east (*e*):**

Здесь

* + **Для грани west (*w*):**

Здесь , аналогично east, но производная  с инверсированным знаком.

**– Для грани north (*n*):**

Здесь , коэффициент 2 для  (из тензора напряжений в Навье-Стокса), центральная аппроксимация.

**– Для грани south (*s*):**

Здесь , аналогично north, но с инверсированным знаком для входа/выхода.

* Источник

Вычисляется в центре КОP: гравитационный источник в осевом направлении, умножен на полный физический объем для интеграла.

На границах:

* , использует
* , использует
* ,
* ,

**Стадия 2:** Коррекция с давлением

# Примечания

* Уравнение Пуассона решается итеративно (например, методом SOR) для обеспечения .
* Для стабильности требуется соблюдение условий CFL () и ограничения на вязкость.
* Функции должны быть заданы пользователем.
* Предполагается, что *η* - динамическая вязкость *µ*; если , умножьте *Pe* на *ρ*.